MAI 1 – Domácí test „umění integrovat" (DU 11-2) – řešení

(už řešení stručněji, snad stačí – pokud ne, tak pište dotazy)

(1.) $$I = \int \left(\frac{\sin x \cdot \cos x}{4+\cos^4 x} + \frac{\sqrt{x}-1}{x(x-2\sqrt{x}+2)} \right) dx = I_1 + I_2$$

(i) integrovaná funkce je spojitá na intervalu $(0,+\infty)$, tedy má zde primitivní funkci a výpočet „rozdělíme" na výpočet I_1 a I_2:

$$\underline{I_1 = \int \frac{\sin x \cdot \cos x}{4+\cos^4 x}\, dx} \underset{VS1}{=} \left| \begin{array}{l} \cos x = t \\ -\sin x\, dx = dt \end{array} \right| = -\int \frac{t}{4+t^4}\, dt =$$

$$\underset{VS1}{=} \left| \begin{array}{l} t^2 = u \\ 2t\,dt = du \end{array} \right| = -\frac{1}{2} \int \frac{du}{4+u^2} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} \int \frac{du}{1+\left(\frac{u}{2}\right)^2} =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\, \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{u}{2}\right)}{\frac{1}{2}} + C = -\frac{1}{4} \operatorname{arctg}\left(\frac{u}{2}\right) + C = \underline{-\frac{1}{4} \operatorname{arctg}\left(\frac{\cos^2 x}{2}\right) + C}$$

Poznámka: 1) v I_1 lze „hned" substituovat $t = \cos^2 x$, pak

$$g'(x) = 2\cos x \cdot (-\sin x) \quad (\text{tj. } dt = -2\cos x \cdot \sin x\, dx)$$

a $$I_1 = \int \frac{\sin x \cdot \cos x}{4+\cos^4 x}\, dx = -\frac{1}{2} \int \frac{-2\sin x \cdot \cos x}{4+\cos^4 x}\, dx = \left| \cos^2 x = t \right| =$$

$$\underset{VS}{=} -\frac{1}{2} \int \frac{1}{4+t^2}\, dt$$ a dále už „stejně" jako dříve

2) integrál I_1 existuje v $\mathbb{R}$, ale součet v zadání I je definován jen v $(0,+\infty)$

často: | nebo lze psát!

$$I_2 = \int \frac{\sqrt{x}-1}{x(x-2\sqrt{x}+2)}\,dx \underset{\substack{VS\,2\\ \text{(„opačná"}\\ \text{substituce)}}}{=} \left|\begin{array}{c} \sqrt{x}=t \\ x=t^2 \\ dx = 2t\,dt \end{array}\right| \left.\begin{array}{c} \sqrt{x}=t \\ x=t^2 (=g(t)) \\ \text{a } g'(t)=2t \end{array}\right|$$

$$= \int \frac{t-1}{t^2(t^2-2t+2)}\cdot 2t\,dt = 2\int \frac{t-1}{t(t^2-2t+2)}\,dt = \left(\begin{array}{c}\text{integrál}\\ \text{racionální}\\ \text{funkce –}\\ \text{– rozklad}\\ \text{na parciální}\\ \text{zlomky}\end{array}\right)$$

$$= -\int \frac{1}{t}\,dt + \int \frac{t}{t^2-2t+2}\,dt = -\int \frac{1}{t}\,dt + \frac{1}{2}\int \frac{2t-2}{t^2-2t+2}\,dt +$$

$$+ \int \frac{1}{(t-1)^2+1}\,dt = \underset{(\text{ale } t>0)}{-\ln|t|} + \frac{1}{2}\ln(t^2-2t+2) + \operatorname{arctg}(t-1) + C$$

$$\underset{(t=\sqrt{x})}{=} -\ln(\sqrt{x}) + \frac{1}{2}(x-2\sqrt{x}+2) + \operatorname{arctg}(\sqrt{x}-1) + C, \quad x\in(0,+\infty)$$

$(C\in\mathbb{R})$

Rozklad: $\dfrac{2(t-1)}{t(t^2-2t+2)} = \dfrac{A}{t} + \dfrac{Bt+C}{t^2-2t+2}$, a tedy

(polynom t^2-2t+2 nemá reálné kořeny)

$$2(t-1) = A(t^2-2t+2) + Bt^2 + Ct$$

a srovnáním koeficientů u:

$$\begin{array}{llll} t^2: & A+B & = 0 & \Rightarrow B = 1 \\ t: & -2A + C & = 2 & \Rightarrow C = 0 \\ t^0: & 2A & = -2 & \Rightarrow A = -1 \end{array}$$

(2) $$I=\int\Big(\underbrace{\frac{\ln(1-\sqrt{x})}{\sqrt{x}}}_{\downarrow}+\underbrace{\frac{2e^{2x}-5}{e^{2x}+4e^{x}+5}}_{\text{def. a spojitá v } R}\Big)dx = I_1+I_2$$

zde: $x>0$ a $1-\sqrt{x}>0 \iff \underline{x\in(0,1)}$ – interval, kde existuje I

a vyjádř.: $I=I_1+I_2$, a

$$\underline{I_1=\int\frac{\ln(1-\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx} = -2\int\ln(1-\sqrt{x})\cdot\Big(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\Big)dx \underset{VS}{=}$$

$$=\left|\begin{array}{l}1-\sqrt{x}=t\ (\equiv g(x))\\ -\frac{1}{2\sqrt{x}}dx=dt\ \ (\text{neb } g'(x)=-\frac{1}{2\sqrt{x}})\end{array}\right| = -2\int\ln t\,dt \underset{PP}{=}$$

$$=\left|\begin{array}{ll}u'=1, & u=t\\ v=\ln t, & v'=\frac{1}{t}\end{array}\right| = -2\Big(t\cdot\ln t-\int t\cdot\frac{1}{t}dt\Big)=$$

$$=-2\,(t\ln t-t)+C \underset{\substack{\text{„zpět"}\\(t=1-\sqrt{x})}}{=} \underline{-2(1-\sqrt{x})\big(\ln(1-\sqrt{x})-1\big)+C}, C\in R$$

$x\in(0,1)$

$$\underline{I_2=\int\frac{2e^{2x}-5}{e^{2x}+4e^{x}+5}dx} \underset{\substack{VS\\ \text{(„opačná")}}}{=} \left|\begin{array}{l}e^{x}=t\\ x=\ln t\ (\equiv g(t))\\ dx=\frac{1}{t}dt\ \ (\text{neb } g'(t)=\frac{1}{t})\end{array}\right| =$$

(– integrál racionální funkce „v e^x" – doporučená substituce $t=e^x$)

$$=\int\frac{2t^2-5}{t^2+4t+5}\cdot\frac{1}{t}dt = \text{„rozklad"} =$$

(na další straně)

$$= -\int \frac{1}{t}\,dt + \int \frac{3t+4}{t^2+4t+5}\,dt = -\int \frac{1}{t}\,dt + \frac{3}{2}\int \frac{2t+4}{t^2+4t+5}\,dt - 2\int \frac{1}{(t+2)^2+1}\,dt =$$

$$= -\ln|t| + \frac{3}{2}\ln(t^2+4t+5) - 2\,\mathrm{arctg}(t+2) + C =$$

$$= \underline{-x + \frac{3}{2}\ln(e^{2x}+4e^x+5) - 2\,\mathrm{arctg}(e^x+2) + C}$$

(I_2 existuje v R, ale součet funkcí má integrál jen v $(0,1)$)

<u>a rozklad na parciální zlomky:</u>

$$\frac{2t^2-5}{t(t^2+4t+5)} = \frac{A}{t} + \frac{Bt+C}{t^2+4t+5}, \text{ tedy}$$

$$2t^2-5 = A(t^2+4t+5) + Bt^2 + Ct, \text{ a srovnáme koeficienty}$$

u t^2: $A+B = 2 \Rightarrow B = 3$

t: $4A + C = 0$, $C = 4$

t^0: $5A = -5 \Rightarrow \underline{A = -1}$

③ $\underline{I} = \int \left(\frac{1}{x^3}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{(\sqrt{x}+2)(x+6\sqrt{x}+10)} \right) dx = I_1 + I_2$

interval, kde I existuje (tj. kde funkce daná za $\int$ má primitivní) je $(0,+\infty)$ (určuje $\sqrt{x}$ a $\frac{1}{x}$) a vypočět:

$$I_1 = \int \frac{1}{x^3}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{x^2}\right) dx = -\frac{1}{2}\int \mathrm{arctg}\left(\frac{1}{x^2}\right)\left(-\frac{2}{x^3}\right) dx \underset{VS}{=} \left| \begin{array}{l} \frac{1}{x^2} = t \\ -\frac{2}{x^3}\,dx = dt \end{array} \right|$$

$$= -\frac{1}{2}\int \mathrm{arctg}\,t\,dt \underset{PP}{=} \left| \begin{array}{ll} u' = 1, & u = t \\ v = \mathrm{arctg}\,t, & v' = \frac{1}{1+t^2} \end{array} \right| \overset{*}{=} \text{(na další stránce) pokračování (omlouvám se)}$$

$$\overset{*}{=} -\frac{1}{2}\left(t\,\mathrm{arctg}\,t - \int \frac{t}{1+t^2}\,dt \right) = -\frac{1}{2}\left(t\,\mathrm{arctg}\,t - \frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right) + c$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{x^4}\right)\right) + c$$

$$I_2 = \int \frac{1}{(\sqrt{x}+2)(x+6\sqrt{x}+10)}\,dx \underset{VS}{=} \left| \begin{array}{l} \sqrt{x} = t \\ x = t^2 \ (\equiv g(t)) \\ dx = 2t\,dt \quad (neboť\ g'(t) = 2t) \end{array} \right|$$

$$= \int \frac{2t}{(t+2)(t^2+6t+10)}\,dt \underset{\text{„rozklad"}}{=} -2\int \frac{1}{t+2}\,dt + \int \frac{2t+10}{t^2+6t+10}\,dt =$$

$$= -2\int \frac{1}{t+2}\,dt + \int \frac{2t+6}{t^2+6t+10}\,dt + 4\int \frac{1}{(t+3)^2+1}\,dt =$$

$$\underset{(t>0)}{=} -2\ln(t+2) + \ln(t^2+6t+10) + 4\,\mathrm{arctg}(t+3) + C =$$

$$= -2\ln(\sqrt{x}+2) + \ln(x+6\sqrt{x}+10) + 4\,\mathrm{arctg}(\sqrt{x}+3) + C, \quad C \in \mathbb{R}, \ x \in (0,+\infty)$$

Rozklad na parciální zlomky:

$$\frac{2t}{(t+2)(t^2+6t+10)} = \frac{A}{t+2} + \frac{Bt+C}{t^2+6t+10}, \text{ tj.}$$

$$2t = A(t^2+6t+10) + (Bt+C)(t+2), \text{ a odkud}$$

soustava rovnic pro A, B, C (srovnáním koeficientů polynomů)

$$\begin{array}{ll} u\ t^2: & A + B = 0 \\ u\ t: & 6A + 2B + C = 2 \\ u\ t^0: & 5A + C = 0 \end{array}$$

a řešení soustavy je: $A = -2$, $B = 2$, $C = 10$

(4) $I=\int\left(\frac{\ln x}{x\cdot\sqrt{1-\ln^4 x}} + \frac{e^x-2}{e^{2x}+2e^x+2}\right)dx = I_1 + I_2$

I_2 je definován v R, tj. maximální interval, kde integrál I existuje, „určuje" fce $\ln x$ a $\sqrt{1-\ln^4 x}$ – tj. $x>0$ a $1-\ln^4 x>0 \iff \ln^4<1 \iff |\ln x|<1 \iff \underline{\frac{1}{e}<x<e}$

(tj. integrál existuje v intervalu $\underline{\left(\frac{1}{e}, e\right)}$)

<u>a integrace:</u>

$$I_1 = \int \frac{\ln x}{x\sqrt{1-\ln^4 x}}\,dx = \int \frac{\ln x}{\sqrt{1-\ln^4 x}}\cdot\frac{1}{x}\,dx \underset{VS}{=}$$

$$= \left| \begin{array}{l} \ln x = t \\ \frac{1}{x}dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{t}{\sqrt{1-t^4}}\,dt \underset{VS}{=} \left| \begin{array}{l} t^2 = u \\ 2t\,dt = du \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{2}\arcsin(u) + C = \underline{\frac{1}{2}\arcsin(\ln^2 x) + C}$$

$C\in R$, $x\in(e^{-1}, e)$

<u>a nebo „rychleji"</u> – stačí nám hned „vidět", že $(\ln^2 x)' = 2\ln x\cdot\frac{1}{x}$,

a tedy lze si „představit": $\underline{\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1-\ln^4 x}}\,dx} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-(\ln^2 x)^2}}\cdot\left(2\ln x\cdot\frac{1}{x}\right)dx \underset{VS}{=}$

$$= \left| \begin{array}{l} \ln^2 x = t\ (\equiv g(t)) \\ 2\ln x\cdot\frac{1}{x} = g'(t) \\ (\text{nebo } 2\ln x\cdot\frac{1}{x}dx = dt) \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \frac{1}{2}\arcsin(t) + C$$

$$= \frac{1}{2}\arcsin(\ln^2 x) + C \quad \text{(opět)}$$

$C\in R$, $x\in\left(\frac{1}{e}, e\right)$

$$\underline{I_2 = \int \frac{e^x - 2}{e^{2x} + 2e^x + 2}\,dx} = \left| \begin{array}{l} e^x = t \\ x = \ln t \ (\equiv g(t)) \\ dx = \frac{1}{t}\,dt \ (\text{neb } g'(t) = \frac{1}{t} \end{array} \right| \overset{=}{\text{VS}}$$

(„racionální" v e^x)   „opačná")

$$= \int \frac{t-2}{t^2+2t+2} \cdot \frac{1}{t}\,dt \underset{\text{„rozklad"}}{=} -\int \frac{1}{t}\,dt + \int \frac{t+3}{t^2+2t+2}\,dt =$$

$$= -\int \frac{1}{t}\,dt + \frac{1}{2}\int \frac{2t+2}{t^2+2t+2}\,dt + 2\int \frac{1}{(t+1)^2+1}\,dt =$$

$$= -\ln|t| + \frac{1}{2}\ln(t^2+2t+2) + 2\,\mathrm{arctg}(t+1) + C =$$

$$= \underline{-x + \frac{1}{2}\ln(e^{2x}+2e^x+2) + 2\,\mathrm{arctg}(e^x+1) + C}$$

(opět - integrál I_2 „sám" existuje v $\mathbb{R}$, ale „v I vládne" I_1)

<u>a rozklad na parciální zlomky:</u>

$$\frac{t-2}{(t^2+2t+2)t} = \frac{A}{t} + \frac{Bt+C}{t^2+2t+2}, \quad \text{tedy odkud}$$

$$t-2 = A(t^2+2t+2) + Bt^2 + Ct$$

(a srovnáním koeficientů dostaneme soustavu rovnic pro A, B, C)

$$\left.\begin{array}{lllll} u\ t^2: & A & +B & & = 0 \\ u\ t: & 2A & & +C & = 1 \\ u\ t^0: & 2A & & & = -2 \end{array}\right\}$$

a řešení soustavy: $\underline{A = -1,\ B = 1,\ C = 3}$